**ממן 12: אלגוריתמים**

**שאלה 1:**

נתון גרף מכוון G=(V,E) , עם משקלים חיוביים w(e)>0 לכל אחת מהצלעות , וקודקוד מקור s.

לכל קודקוד קיים מסלול מ-s ל-v בגרף .

. מסלול הוא מזערי אם עבור כל מסלול אחר ץ

צלע תיקרא שימושית אם היא צלע אחרונה באיזשהו מסלול מזערי.

1. נוכיח באינדוקציה על גודל המסלול שאם כל הצלעות ב- שימושיות, אזי הוא מסלול מזערי:
   1. עבור n=0 גודל המסלול הוא 0, כלומר s=v. משקל המסלול הוא כסכום משקלי הצלעות – לכן 0, ומכיוון שנתון שלכל אחת מצלעות הגרף משקל חיובי אזי ברור שכל מסלול אחר יקיים , ולכן המסלול הוא המסלול המזערי.
   2. נניח שהטענה נכונה עבור n ונוכיח שהטענה נכונה עבור n+1:

על פי הנחת האינדוקציה, כל n+1 הצלעות במסלול שימושיות. נגדיר מסלול בעל n צלעות ונסמנו . על פי ההנחה – זהו מסלול מזערי. נסמן קשת e ששייכת למסלל זה. לפי ההגדרה – צלע זו היא הצלע האחרונה במסלול מזערי כלשהו ץ נניח בשלילה ש-. הצלע e מוכלת בשני המסלולים (כי כך הגדרנו) ומשקלה חיובי ולכן אם נוריד אותה משני הצדדים אי השיוויון לא ישתנה – וזאת סתירה להגדרת המסלול כמסלול המזערי. לכן מתקים

1. נתון שלפחות אחת מהצלעות במסלול אינה שימושית. נסמנה e. e אינה שימושית ולכן היא לא צלע אחרונה במסלול מזערי כלשהו . כלומר קיים מסלול המקיים . נחבר את המסלולים ,עם (k,v) ונקבל: כלומר אינו מזערי. מש"ל.
2. נתון ש- כמעט מזערי, לכן על פי הסעיפים הקודמים – קיימת במסלול זה לפחות קשת לא שימושית אחת. נראה שקיימת במסלול זה רק קשת לא 0שימושית אחת. נניח בשלילה שקיימות בו 2 קשתות לא שימושיות – ונסמנן , כך ש- נמצאת לפני במסלול (בה"כ). נסתכל על המסלול החלקי: – מסלול זה מכיל את הקשת ולכן אינו מזערי (מכיוון שקשת זו לא שימושית ללפי ההנחה – והוכחנו בסעיף ב שמסלול שמכיל קשת שאינה שימושית הוא אינו מזערי). כלומר – קיים מסלול אחר שהוא מזערי ומקיים: . נסתכל על המסלול החדש שמורכב מחיבור המסלולים ו- . מתקיים:

- כלומר . אך הגדרנו שגם הקשת היא אינה שימושית והיא מוכלת במסלול - ולכן מסלול זה הוא לא מזערי (סעיף ב) – וזו סתירה לכך ש- הוא כמעט מזערי (לפי ההגדרה). לכן למסלול צלע לא שימושית אחת בלבד.

1. נתון הצלע הלא שימושית היחידה במסלול . לכן – כל השאר הצלעות במסלול הן שימושיות. נסתכל על המסלול החלקי . מסלול זה מורכב מצלעות שימושית בלבד מכיוון ש-e היא הצלע הלא שימושית היחידה (ומהווה את הרישא למסלול ) – ולכן על פי סעיף א מסלול זה הוא מסלול מזערי. באותו האופן – נסתכל על המסלול החלקי – שמהווה את הסיפא למסלול – גם מסלול זה מורכב מקשתות שימושיות בלבד ולכן על פי סעיף א גם הוא מסלול מזערי.
2. נציג בעזרת הסעיפים הקודמים אלגוריתם למציאת מסלול כמעט מזערי מקודקוד נתון s לקודקוד יעד נתון t:
   1. נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה למציאת מסלולים מינימליים מ-s, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.
   2. נהפוך את הצמתים בגרף (כדי שנוכל למצוא את המסלולים המינימליים של t)
   3. נריץ את האלגוריתם של דייקסטרה פעם נוספת למציאת מסלולים מינמליים מ-t, נשמור את הקשתות ונסמן אותן כשימושיות.
   4. נהפוך את הצמתים בגרף בחזרה.
   5. נעבור על צלעות הגרף.
      1. אם הצלע הנוכחית היא לא שימושית (יש לנו את המידע על זה לפי השלבים הקודמים) – נסמנה e=(u,v). נבדוק האם זה המרחק המינימלי שנמצא עד כה. אם כן- נשמור את המסלול (מכיל מסול מינימלי מ-s לu, ומv לt – ואת e צלע לא שימושית אחת).
   6. בסוף הריצה נקבל את המסלול המינימלי המכיל יש צלע לא שימושית אחת בלבד.

נחשב זמן ריצה:

האלגוריתם של דייקסטרה רץ פעמיים – וזמן הריצה שלו הוא . היפוך הצמתים בגרף מתבצע פעמיים – וזמן הריצה שלו הוא . מעבר על הגרף וביצוע לכל צלע מספר סופי של פעולות – זמן הריצה של שלב זה הוא .

לכן זמן הריצה של האלגוריתם הוא: כנדרש.

**שאלה 2:**

נתון עץ פורש מזערי T של גרף לא מכוון קשיר עם משקלים אי שליליים לכל אחת מהצלעות. G’ גרף המתקבל מ-G לאחר השמטת צלע e מתוך צלעות E של G. G’ קשיר. נציג אלגוריתם שמתקן את T, כך שיתקבל ממנו עץ פורש מזערי T’ עבור G’:

רעיון האלגוריתם: נמצא את רכיבי הקשירות של T לאחר שהסרנו את הקשת e\*, נחפש את הקשת בעלת המשקל המינימלי שמחברת בין רכיבי הקשירות הללו – וכך T יהפוך שוב לעץ פורש מינימלי.

האלגוריתם:

1. e\*= (v, w) הצלע אותה נשמיט מתוך T
2. נסמן T' כ-T לאחר הסרת הצלע e\*
3. נריץ אלגוריתם BFS מקודקוד העץ T’ עד ל-w, על מנת לקבל את רכיבי הקשירות של w .
4. נעבור על כל אחת מהצלעות ב-G’ שמקושרות לקודקודים של רכיב הקשירות
   1. אם הצלע הנוכחית נכנסת לקודקוד שאינו ברכיב הקשירות והיא בעלת המשקל המינימלי – נסמנה e’.
5. נוסיף את הצלע e’ ל-T’ ובכך T’ יהיה עץ פורש מינימלי.

הוכחת נכונות:

* 1. נסמן בתור S את קבוצת הקשירות של w בעץ T’ (לאחר הסרת הצלע (v,w)).
  2. גודל קבוצת הקשירות S קטן מ-V, מכיוון שאם שתי הקבוצות היו באורך שווה היינו מקבלים לאחר הסרת הצלע e\* גרף קשיר – משמע היה מעגל בעץ T – וזו סתירה להיותו עץ.
  3. הקבוצות S ו-(S-V) אינן ריקות – ולכן על פי משפט 4.17 הקשת המינימלית בין 2 הקבוצות הללו חייבת להיות חלק מכל עץ פורש מינימלי של G’.
  4. נניח בשלילה שהעץ T’ אינו עץ פורש מינימלי. לפי c הצלע e’ היא חלק מכל עץ פורש מינימלי, לכן ייתכן רק שT’ שפורש את S אינו מינימלי או T’ שפורש את V-S אינו מינימלי. אך חלקים אלה מוכלים בעץ הפורש המינימלי הנתון T – כלומר ניתן להחליף אותם בעץ מינימלי – כלומר העץ T אינו עץ פורש מינימלי – וזוהי סתירה לנתון. לכן נסיק כי האלגוריתם נכון והוא מוצא עץ פורש מינימלי.

חישוב זמן ריצה:

זמן הריצה של סריקת העץ ע"י אלגוריתם BFS הוא . זמן הריצה של מעבר על הקשתות הוא – ושאר הפעולות רצות בזמן קבוע. כמו כן – נתון שהגרף קשיר, ולכן על פי ספר הלימוד מתקיים – לכן זמן הריצה הוא כנדרש.

**שאלה 3:**

*נציג נוסחת 3-CNF עליה האלגוריתם נכשל:*

*כך ש:*

*ההשמה - מספקת את הנוסחה ולכן הנוסחה ספיקה. נראה כי האלגוריתם נכשל:*

האלגוריתם החמדן יבחר השמות שממקסמות את מספר הפסוקיות המסופקות החדשות.

*תחילה, עבור המשתנה , האלגוריתם יבחר בהשמה - כי השמה זו מספקת את שני הפסוקים לעומת פסוק אחד עבור הערך F.*

*באותו האופן – האלגוריתם יבחר עבור המשתנה את ההשמה - כי השמה זו מספקת את שני הפסוקים לעומת פסוק אחד עבור הערך F. גם עבור המשתנה תיבחר ההשמה (שמספקת את הפסוקים לעומת פסוק אחד ). כלומר – עד כה האלגוריתם בחר את ההשמות : – כלומר הפסוק לא יסופק לעולם! דבר המוביל לכך ש- לא יסופק, מכיוון ש:*

*לסיום – ראינו שהאלגוריתם יפיק כפלט השמה לא מספקת עבור הפסוק, וכמו כן ראינו שהפסוק אכן ספיק – לכן האלגוריתם נכשל.*

***שאלה 4:***

*נוכיח שלכל עץ מושרש בינרי לחלוטין T קיימת סדרת שכיחויות f, כך שאחד מעצי הופמן של הסדרה הוא T.*

*יהי עץ בינרי לחלוטין עם n צמתים. לכל עלה בעץ נגדיר לו שכיחות בהתאם :*

*נראה ע"י אינדוקציה על עומק העץ d שלסדרת השכיחויות יש עץ הופמן שהוא T עצמו:*

*נראה שהטענה נכונה עבור d=0: אם עומק העץ הוא 0 אזי ב-T יש עלה אחד, וסדרת השכיחויות היא {} = {1}. עץ הופמן של סדרה זו הוא גם בעל עלה אחד – כלומר הוא זהה ל-T – הוא T עצמו. מש"ל.*

*נניח שהטענה נכונה עבור T שעומקו הוא d. נראה שהטענה נכונה עבור עץ בעומק d+1:*

יהי T עץ בינרי לחלוטין שעומקו המרבי הוא d+1. לפיכך – קיים לפחות צומת אחד u המקיים d(u) = d+1. מכיוון ש-T הוא עץ בינרי לחלוטין -לu יש אח v שהוא גם עלה, וגם הוא מקיים d(v) = d+1 (על פי תכונות עץ בינרי לחלוטין). נשכפל את T ל-T’.

1. כל עוד קיים צומת u בקבוצת הצמתים של T’, כך ש : d(u) = d+1:
   1. נמצא את אחיו של של u, v מתוך קבוצת הצמתים של T’, ונציב באב שלהן את סכום השכיחויות של הצמתים: . לאחר מכן נמחק את העלים u v מהעץ.

לאחר מכן, נקבל שכל האבות של האחים שמצאנו הם בעומק d (מכיון שבניהם היו בעומק d+1), והשכיחות שלהם היא – בהתאם לסדרת השכיחויות . כמו כן, עומק העץ כעת הוא d (מכיוון שאיחדנו את כל הצמתים בעומק d+1 לעומק d). כלומר T’ הוא ע בינרי לחלוטין בעומק d שמקיים את סדרת השכיחויות f. לכן על פי הנחת האינדוקציה – קיים עץ הופמן של סדרת שכיחויות זו שהא T’. נבנה מ-T’ בחזרה את T המקורי ע"י כך שנבצע את הפעולות ההפוכות שביצענו בהפיכת העץ T’ לעץ בעומק d – נקבל בהתאם עץ הופמן תקין שהוא בעצם T. מש"ל.